



ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Rappels :

- ❖ Soit une équation différentielle du type :

$$y' = ay$$

Alors les solutions générales sont de la forme

$$y(x) = Ke^{ax} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- ❖ Soit une équation différentielle du type :

$$y' = ay + b$$

Alors les solutions générales sont de la forme

$$y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- ❖ Soit une équation différentielle du type :

$$ay' + by = f(x)$$

Alors nous cherchons les solutions de l'équation en 2 étapes :

- 1^{ère} étape : Solution générale de l'équation homogène

$$ay' + by = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{b}{a}y$$

Donc les solutions générales de l'équation homogène, notée y_G sont de la forme

$$y_G = Ke^{-\frac{b}{a}x} \quad \text{avec } K \in \mathbb{R}$$

- 2^{ème} étape : Solution particulière de l'équation homogène

Cette solution dépend de notre $f(x)$, (voir différents cas dans les exercices).

Elle sera notée y_p .

- Les solutions de notre équation différentielle sont donc de la forme :

$$y(x) = y_G + y_p$$





EXERCICE I

86 (E) est l'équation différentielle $y' + 2y = e^{3x}$.

a) Démontrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par

$g(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ est une solution particulière de (E).

b) Démontrer qu'une fonction f est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

c) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

a) On pose $y = g(x) = \frac{1}{5}e^{3x}$ et $y' = g'(x) = \frac{3}{5}e^{3x}$

$$g'(x) + 2g(x) = \frac{3}{5}e^{3x} + \frac{2}{5}e^{3x} = \frac{5}{5}e^{3x} = e^{3x}$$

Donc g est solution de l'équation (E).

b) Montrons que **f est solution de (E)** \Leftrightarrow **la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.**

- Supposons que **f est solution de (E)**, montrons que **$f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.**

Comme f est solution de (E), on a :

$$\underline{f' + 2f} = e^{3x}$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$\underline{(f - g)' + 2(f - g)} = f' - g' + 2f - 2g = \underline{f' + 2f} - g' - 2g = e^{3x} - g' - 2g$$

$$= e^{3x} - \frac{3}{5}e^{3x} - \frac{2}{5}e^{3x} = \mathbf{0}$$

Donc $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.





- Supposons que $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, montrons que f est solution de (E).

Comme $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$, on a :

$$(f - g)' + 2(f - g) = 0$$

$$f' - g' + 2f - 2g = 0$$

$$f' + 2f - g' - 2g = 0$$

$$f' + 2f = g' + 2g$$

$$f' + 2f = e^{3x}$$

Donc f est solution de (E).

Donc f est solution de (E) \Leftrightarrow la fonction $f - g$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.

c)

$$y(x) = y_G + y_p$$

$$y' + 2y = 0 \Leftrightarrow y' = -2y$$

Donc les solutions générales de l'équation homogène, notée y_G sont de la forme

$$y_G = Ke^{-2x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = Ke^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$





EXERCICE II

97 f est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{1}{(e^x + 1)^2}$$

a) Démontrer que pour tout réel x ,

$$f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$

b) En déduire la primitive F sur \mathbb{R} telle que $F(0) = 1$ de la fonction f .

a)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} &= \frac{(e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} - \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{(e^x + 1)^2 - e^x(e^x + 1) - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + 2e^x + 1 - e^{2x} - e^x - e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{1}{(e^x + 1)^2} = f(x) \end{aligned}$$

b)

$$F(x) = x - \ln(e^x + 1) + \frac{1}{e^x + 1} + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}$$

$$F(0) = 1$$

Donc :

$$0 - \ln(e^0 + 1) + \frac{1}{e^0 + 1} + C = 1$$

$$-\ln(1 + 1) + \frac{1}{1 + 1} + C = 1$$

$$-\ln(2) + \frac{1}{2} + C = 1$$

$$C = 1 - \frac{1}{2} + \ln(2)$$

$$C = \frac{1}{2} + \ln(2)$$





EXERCICE III

107 Un chariot de masse 200 kg se déplace à partir d'une origine O sur une voie rectiligne et horizontale. $x(t)$ est la distance, en mètre, qui le sépare de l'origine en fonction du temps t , en seconde ($t \geq 0$).

D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ où x'' est la dérivée de la fonction dérivée x' par rapport au temps t .

1. Déterminer $x(0)$.
2. $v(t)$ est la vitesse du chariot à l'instant t et vérifie $v(t) = x'(t)$.
 - a) Démontrer que x vérifie $200x'' + 25x' = 50$ si, et seulement si, la fonction v vérifie $v' = -0,125v + 0,25$.
 - b) Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle : $y' = -0,125y + 0,25$.
 - c) La vitesse initiale du chariot est supposée nulle, ainsi $v(0) = 0$.
Déterminer alors la vitesse $v(t)$ pour tout réel t .
 - d) Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter le résultat.
3. a) Démontrer alors que la fonction x est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$.
- b) Quelle est la distance, en m, parcourue par le chariot au bout de 30 secondes ? Arrondir au dixième.

2) a)

Montrons que $200x'' + 25x' = 50 \Leftrightarrow v' = -0,125v + 0,25$.

- Supposons que $200x'' + 25x' = 50$, montrons que $v' = -0,125v + 0,25$.

$$200x'' + 25x' = 50$$

Comme $x' = v$, on a aussi $x'' = v'$, et donc :

$$200v' + 25v = 50$$

$$200v' = 50 - 25v$$

$$v' = \frac{50}{200} - \frac{25v}{200}$$

Donc :

$$v' = 0,25 - 0,125v$$





- Supposons que $v' = -0,125v + 0,25$, montrons que $200x'' + 25x' = 50$.

$$v' = 0,25 - 0,125v$$

Comme $x' = v$, on a aussi $x'' = v'$, et donc :

$$x'' = 0,25 - 0,125x'$$

$$x'' + 0,125x' = 0,25$$

$$\frac{50}{0,25}x'' + \frac{50}{0,25}0,125x' = 0,25 \times \frac{50}{0,25}$$

$$200x'' + 25x' = 50$$

b)

$$y' = ay + b$$

Alors les solutions générales sont de la forme

$$y(t) = Ke^{at} - \frac{b}{a} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

$$y' = -0,125y + 0,25$$

$$y(t) = Ke^{-0,125t} + \frac{0,25}{0,125} \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

$$y(t) = Ke^{-0,125t} + 2 \text{ avec } K \in \mathbb{R}$$

c)

$$y(x) = Ke^{-0,125t} + 2$$

$$y(0) = Ke^{-0,125 \times 0} + 2 = 0$$

$$K \times 1 + 2 = 0$$

$$K = -2$$

$$v(t) = -2e^{-0,125t} + 2$$

d)

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,125t} = 0^+$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = 2$$

Plus le temps passe, et plus la vitesse s'approche de 2 m/s.





3) a)

$$v(t) = -2e^{-0,125t} + 2$$

$$x'(t) = v(t)$$

Déterminer $x(t)$ revient à trouver la primitive de $v(t)$.

$$x(t) = \frac{2}{0,125} e^{-0,125t} + 2t + C$$

$$x(t) = 16e^{-0,125t} + 2t + C$$

Comme

$$x(0) = 16e^{-0,125 \times 0} + 2 \times 0 + C = 0$$

$$16 + C = 0$$

$$C = -16$$

$$x(t) = 16e^{-0,125t} + 2t - 16$$

b)

$$x(30) = 16e^{-0,125 \times 30} + 2 \times 30 - 16 \approx 44,4 \text{ m}$$

